

Πολυτεχνείο Πάφου

NO.

Date 28/05/2019

Άσκηση 3

X_{ij} η ποσότητα προϊόντος i που παρασκευάζεται από j λίπας

$$\max 310(X_{11} + X_{12} + X_{13}) + 330(X_{21} + X_{22} + X_{23}) + 350(X_{31} + X_{32} + X_{33}) + 235(X_{41} + X_{42} + X_{43})$$

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} \leq 10$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} \leq 16$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} \leq 8$$

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} = 13$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} = 15$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} = 23$$

$$X_{41} + X_{42} + X_{43} = 12$$

$$X_{11} \frac{430}{13} + X_{21} \frac{650}{15} + X_{31} \frac{530}{23} + X_{41} \frac{390}{12} \leq 6300$$

$$X_{12} \frac{430}{13} + X_{22} \frac{650}{15} + X_{32} \frac{530}{23} + X_{42} \frac{390}{12} \leq 8700$$

$$X_{13} \frac{430}{13} + X_{23} \frac{650}{13} + X_{33} \frac{530}{23} + X_{43} \frac{390}{12} \leq 5360$$

$$X_{ij} \geq 0$$

Α. Είσα ογκο (m³) / Τόσο διατίθεται το το λίπας
στο ΠΑΦΟ

$$\frac{X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41}}{10} = \frac{X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42}}{16} = \frac{X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43}}{8}$$

Άσκηση 2 (Φορτωμένο 3)

x_1 η ποσότητα ζιτών αλάτος (barpedia)

x_2 \Rightarrow νιππίλας \Rightarrow (barpedia)

$$\min 3x_1 + 3x_2$$

$$4 - (3x_1 + 5x_2) \leq 1 \quad (\text{πολύ βόσος})$$

$$5.2 - (2x_1 + 1.5x_2) \leq 0.2 \quad \text{ωπάρι}$$

$$7.3 - (20x_1 + 3x_2) \leq 1.3 \quad \text{κωφάρι}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Άσκηση 3 (Κλασικό πρόβλημα)

φω 3

Α/α	Αριθ. ποδών			Υπόδειγμα
	1.5	2.5	3.5	
1	6	0	0	1
2	5	1	1	0
3	4	0	1	0.5
4	3	2	0	0.5
5	2	0	2	0
6	2	1	1	1
7	1	2	1	0
8	1	3	0	1
9	0	4	0	0
10	0	1	2	0.5

x_i αριθ. ποδών που κλωβούνται με τον i τρόπο $i=1, 2, \dots, 10$

$$\min x_1 + x_2 + \dots + x_{10}$$

$$\min 1x_1 + 2.5x_2 + 2.5x_3 + x_4 + x_5 + 0.5x_6$$

$$6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 2x_6 + x_7 + x_8 \geq 1000$$

$$x_2 + 2x_4 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 + 4x_9 + x_{10} \geq 2000$$

$$x_2 + x_3 + 2x_5 + x_6 + x_7$$

$$2x_{10} \geq 4000$$

$$x_i \geq 0$$

1) gpt. standar (ru. du. art. or. du. lubs)

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 3 \quad z = 9$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$$

$$2x_1 - 2x_2 + x_4 = 2$$

$$x_2 + x_5 = 3$$

$$x_i \geq 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_5 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$$

$$x_4 = 6$$

$$x_2 = 3$$

$$\text{At } x_1 = 0 \quad x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$$

$$x_4 = 6$$

$$x_5 = 1$$

odes Ti. Trepitwarys kau bpnoko Tis ^{es} lubs

• At Trepw pu ~~pa~~ ~~des~~ ~~dan~~ ~~tau~~ ~~du~~ ~~art.~~ ~~or.~~ ~~du.~~ ~~lubs~~ •

ti. x $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ Trepw in ebites duses \Rightarrow

$$x_3 = -4$$

$$x_4 = 2$$

$$x_5 = 3$$

• At alldeu $x_1 = 0$ $x_2 = 4$ $z = 12$ apa n. du. art. or. du. lubs da eiva $12 - 9 = 3$

Aloran 2 (gedax Duitano)
Duitano 5

$$\max x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

③ Deu ex. duseu x_1 P_2 ex. in apmika.

Task 2 (bud 5)
④

$$\min w_1 + w_2 + w_3$$

$$w_1 + w_2 - w_3 \geq 1$$

$$w_1 - w_2 + w_3 \geq 1$$

$$w_1 \leq 0 \quad w_2, w_3 \geq 0$$

Task 3 (bud 5)

x_i af. d. tipsforbrug Total $i \quad i=1, 2, 3$

$$\max 10x_1 + 6x_2 + 8x_3$$

$$2x_1 + x_2 + 1.6x_3 \leq 32$$

$$x_1 + 2x_2 + 1.6x_3 \leq 40$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 43$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 60$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 40$$

$$x_i \geq 0$$

1. Ένα αεροπλάνο έχει τρία τμήματα για τη μεταφορά φορτίου μπροστά, στο κέντρο και στην ουρά. Αυτά τα τμήματα έχουν τους ακόλουθους περιορισμούς ως προς το βάρος και τον όγκο του μεταφερόμενου φορτίου:

ΤΜΗΜΑ	ΒΑΡΟΣ (ΤΟΝΟΙ)	ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ (M ³)
μπροστά	10	6800
κέντρο	16	8700
ουρά	8	5300

Επιπλέον ποσοστό του βάρους πρέπει να είναι το ίδιο στα τρία τμήματα για να διατηρείται η ισορροπία του αεροπλάνου. Τα παρακάτω φορτία πρέπει να μεταφερθούν στην επόμενη πτήση:

ΦΟΡΤΙΟ	ΒΑΡΟΣ (ΤΟΝΟΙ)	ΌΓΚΟΣ (M ³)	ΚΕΡΔΟΣ (€/ΤΟΝΟ)
C1	18	480	310
C2	15	650	380
C3	23	580	350
C4	12	390	285

Να διατυπωθεί το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (π.γ.π) για τη φόρτωση του αεροπλάνου που μεγιστοποιεί το κέρδος της πτήσης

2. Ο υπεύθυνος της επιτροπής αγώνα κατά της ρύπανσης μιας λίμνης έχει για κύριο έργο του τον έλεγχο του περιορισμού των τοξικών ουσιών που ρυπαίνουν τη λίμνη, στα ανεκτά όρια που προβλέπει ο νομοθέτης. Τρεις βιομηχανικές μονάδες πετούν τα απόβλητά τους στη λίμνη. Αυτά τα απόβλητα περιέχουν χημικές ουσίες ιδιαίτερα επικίνδυνες, όπως άλατα μόλυβδου (Pb), υδραργύρου (Hg) και μαγγανίου (Mn). Για τον περιορισμό της ρύπανσης στα ανεκτά επίπεδα, διατίθενται δύο είδη προϊόντων (ακίνδυνα για την υγεία), το ένα βασισμένο σε θειικά άλατα, το δεύτερο βασισμένο σε νιτρικά άλατα. Τα προϊόντα αυτά αντιδρούν με τις παραπάνω τοξικές ουσίες παράγοντας τελείως ακίνδυνα ιζήματα. Το πρόβλημα που θέτει η επιτροπή αγώνα, επικεντρώνεται στον υπολογισμό εκείνου του συνδυασμού θειικών και νιτρικών αλάτων που ελαχιστοποιεί το κόστος προστασίας ενώ παράλληλα, επιτρέπει την ικανοποίηση των οικολογικών περιορισμών. Ο υπεύθυνος της επιτροπής που αντιμετωπίζει το πρόβλημα διαθέτει τα εξής παρακάτω στοιχεία:

α) Την ποσότητα αποβλήτων και την περιεκτικότητά τους σε τοξικές ουσίες για κάθε βιομηχανία που δίνονται στον πίνακα

Βιομηχανική Μονάδα	Όγκος και περιεκτικότητα αποβλήτων			
	Όγκος Αποβλήτων (m ³)	Συγκέντρωση (g/m ³)		
		Pb	Hg	Mn
1	1000	1.00	2.50	0.70
2	3000	0.50	0.50	1.00
3	1200	1.25	1.00	0.50

β) Την ικανότητα εξουδετέρωσης των αλάτων:

- 1 βαρέλι θειικού άλατος εξουδετερώνει 3 κιλά αλάτων μόλυβδου, 2 κιλά αλάτων υδραργύρου και 20 κιλά αλάτων μαγγανίου,
- 1 βαρέλι νιτρικού άλατος εξουδετερώνει 5 κιλά αλάτων μόλυβδου, 12.5 κιλά αλάτων υδραργύρου και 3 κιλά αλάτων μαγγανίου.

γ) Τους οικολογικούς περιορισμούς:

Οι μέγιστες ποσότητες τοξικών ουσιών στα νερά, που επιτρέπει η νομοθεσία μετά την εφαρμογή μέτρων κατά της μόλυνσης, είναι:

- άλας μόλυβδου: 1 κιλό
- άλας υδραργύρου: 0.2 κιλά
- άλας μαγγανίου: 1.3 κιλά

Υποτίθεται ότι η φύση καταστρέφει από μόνη της καθημερινά αυτές τις ποσότητες, δεν μπορεί όμως να καταστρέφει περισσότερο.

δ) Το κόστος προϊόντων εξουδετέρωσης

- 1 βαρέλι νιτρικού άλατος κοστίζει 3000 χρηματικές μονάδες (χ.μ)
- 1 βαρέλι θειικού άλατος κοστίζει 3000 (χ.μ)

Το πρόβλημα της επιτροπής συνίσταται στην εναλλακτική επιλογή θειικών ή/ και νιτρικών αλάτων που ελαχιστοποιούν το κόστος προστασίας της λίμνης

3. Από μια εταιρεία κατασκευής χαρτιού ζητήθηκε η παραγωγή χαρτιού σε ρολό μήκους 150 cm και πλάτους 1.5, 2.5 και 3.5 cm. Τα μηχανήματα όμως της εταιρείας μπορούν να παράγουν ρολά χαρτιού οποιουδήποτε μήκους αλλά πλάτους αποκλειστικά 10 cm και συνεπώς η εταιρεία πρέπει να κόψει τα παραγόμενα ρολά στις ζητούμενες προδιαγραφές (πλάτους)

A. Αν οι ελάχιστες απαιτήσεις της αγοράς ανέρχονται σε 1000 ρολά πλάτους 1.5 cm, 2000 ρολά πλάτους 2.5 cm και 4000 ρολά πλάτους 3.5 cm υποδείξτε ένα π.γ.π για την εύρεση του συνολικού αριθμού ρολών χαρτιού που πρέπει να παραχθούν έτσι ώστε οι απώλειες σε χαρτί της εταιρείας να είναι οι ελάχιστες δυνατές

B. Τι αλλάζει αν το ενδιαφέρον της εταιρείας επικεντρωθεί μόνο στην εύρεση του ελάχιστου δυνατού συνολικού αριθμού ρολών χαρτιού που πρέπει να παραχθεί (κάτω από τις ίδιες απαιτήσεις της αγοράς); Δώστε το νέο π.γ.π

4. Μια τεχνική εταιρεία που πρέπει να παραδώσει ένα μεγάλο δημόσιο έργο μέσα στα επόμενα δύο χρόνια, χρειάζεται 200 επιπλέον φορτηγά. Τα φορτηγά αυτά, είτε θα τα αγοράσει πληρώνοντας 140 χρηματικές μονάδες ανά φορτηγό, είτε θα τα νοικιάσει με ετήσιο κόστος 80 χ.μ. ανά φορτηγό. Τα χρήματα για την αγορά των φορτηγών θα πρέπει να καταβληθούν με την έναρξη του έργου αλλά αυτά της ενοικιάσής τους σε δύο δόσεις (στην αρχή της κάθε χρονιάς). Ξεκινώντας το έργο, η εταιρεία έχει στη διάθεσή της για αγορά και/ή ενοικίαση φορτηγών ένα ποσό ύψους 8000 χ.μ. Επιπλέον, μπορεί να εκμεταλλευτεί τη δυνατότητα δανεισμού που εξασφάλισε: ετήσιο δάνειο μέχρις 20000 χ.μ. με τόκο 16% αλλά με την υποχρέωση αποπληρωμής του στο τέλος της χρονιάς. Τα ετήσια κέρδη για την εταιρεία από το κάθε φορτηγό, εκτιμήθηκαν στις 120 χ.μ. και χρησιμοποιούνται αποκλειστικά στη διαδικασία ενοικίασης φορτηγών και εξόφλησης του δανείου που πάρθηκε. Να υποδειχθεί ένα π.γ.π. για την εύρεση του τρόπου προμήθειας των φορτηγών, ο οποίος να ελαχιστοποιεί το συνολικό τους κόστος.

5. Δίνεται το πρόβλημα

$$\begin{aligned} \max & -x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} & \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & 2x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Να βρείτε γραφικά τον χώρο των εφικτών λύσεων και τις κορυφές του, σχεδιάζοντας τις ευθείες των περιορισμών.
2. Να βρείτε με αλγεβρικό τρόπο το πολύ δυο από τις κορυφές του συνόλου των εφικτών λύσεων του προβλήματος, διατυπώνοντας με προσοχή την διαδικασία που θα ακολουθήσετε. Να πάρετε τις προβολές των κορυφών αυτών στο επίπεδο x_1, x_2 (θα ταυτισθούν με κάποια από τα σημεία που έχετε βρει στο ερώτημα 1). Να εντοπίσετε τα ζεύγη των ευθειών των περιορισμών, που σαν τομές τους προκύπτουν οι προβολές, στο επίπεδο x_1, x_2 , των κορυφών που έχετε βρει. Αν στην προσπάθειά σας να βρείτε τις δυο κορυφές με αλγεβρικό τρόπο βρείτε κάποια λύση που δεν είναι βασική εφικτή, για αυτή την λύση πάρετε την προβολή της στο επίπεδο x_1, x_2 και στην συνέχεια προσπαθήστε να εντοπίσετε τις δυο ευθείες που ορίζουν αυτό το σημείο ως τομή. Που περιμένετε να τέμνονται αυτές οι ευθείες; Μέσα στο χώρο των εφικτών λύσεων ή έξω από αυτόν; Αντίστροφα από την γραφική παράσταση που θα κάνετε στο ερώτημα 1, να εντοπίσετε δυο ευθείες περιορισμών που τέμνονται σε σημείο έξω από τον χώρο των εφικτών λύσεων. Μετά προσπαθήστε να βρείτε τη βασική λύση που η προβολή της στο επίπεδο x_1, x_2 αντιστοιχεί σε αυτό το σημείο. Ελέγξτε τις συντεταγμένες αυτής της βασική λύσης. Θα διαπιστώσετε ότι αυτή η λύση δεν είναι εφικτή. Συσχετίστε την θέση της προβολής, με το γεγονός ότι η λύση δεν είναι εφικτή.
3. Να βρείτε γραφικά την λύση μεγίστου καθώς και το μέγιστο που ζητείται. Δικαιολογήστε με προσοχή την πορεία με αναφορά στο θετικό και αρνητικό ημιπίεδο στο οποίο κάθε ευθεία χωρίζει το επίπεδο.
4. Ποιες είναι οι τιμές των μεταβλητών περιθωρίου στη βέλτιστη λύση. Ποιοι περιορισμοί είναι ενεργοί και ποιοι όχι στη βέλτιστη λύση.
5. Ποια είναι η λύση και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αν στον περιορισμό (3) θέσουμε 6 αντί 3. (Η απάντηση να δοθεί με γραφική επίλυση)
6. Χρησιμοποιώντας την απάντηση στη ερώτηση (5) να βρείτε, πάλι γραφικά, την αύξηση της αντικειμενικής συνάρτησης αν το 3 αντικατασταθεί με το 4, 5, 6. Μπορείτε βασίζόμενοι μόνο στην απάντηση σε αυτό το ερώτημα να συμπεράνετε αναλογικά αύξηση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης σε αυξήσεις του συντελεστή b_3 ; (Αυτή η αύξηση της αντικειμενικής συνάρτησης όταν αυξάνεται κατά μία μονάδα ο πόρος b_3 λέγεται δυϊκή τιμή (Dual price) του πόρου 3)

- 1 Δίνεται το π.γ.π
 $\max x_1 + 2x_2 + x_3$
 $x_1 + x_2 \leq 2$
 $2x_1 + x_2 - x_3 \geq 1$
 $x_1 - x_3 \leq 4$
 $x_i \geq 0 \quad i=1, 2, 3$

1. Να βρεθεί η άριστη λύση του προβλήματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Simplex
 2. Έχει το παραπάνω πρόβλημα εναλλακτική άριστη λύση; Αν ναι να βρεθεί.

2 Παρακάτω δίνονται το αρχικό και μέρος του τελικού tableau ενός π.γ.π μεγιστοποίησης που επιλύθηκε με τη M μέθοδο

			1	1	0	0	0	-M
B	c_B	β	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_6	-M	1	1	1	-1	0	0	1
P_4	0	1	1	-1	0	1	0	0
P_5	0	1	-1	1	0	0	1	0
		-M	-1-M	-1-M	M	0	0	0

			1	1	0	0	0	-M
B	c_B	β	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	1	1	1	-1	0	1	0	0
P_3	0	0	0	-2	1	1	0	-1
P_5	0	2	0	0	0	1	1	0
		1	0	-2	0	1	0	4

(1) Να διατυπωθεί το πρόβλημα (2) Να συμπληρωθεί το τελικό tableau (3) Με αναφορά στο τελικό tableau να δοθεί η λύση του προβλήματος. (4) Του προβλήματος αυτού να κατασκευάσετε το δυϊκό, έχει το δυϊκό πρόβλημα λύση;

3 Μια εταιρεία χρησιμοποιώντας αχλάδια και ροδάκινα παράγει τρία διαφορετικά είδη φρουτοχυμών Α, Β, Γ τα οποία στη συνέχεια διαθέτει στην αγορά. Η διαδικασία της παραγωγής αποτελείται από τρία στάδια της μίξης της κονσερβοποίησης και της συσκευασίας. Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται οι απαιτήσεις κάθε προϊόντος σε παραγωγικούς συντελεστές, και η τιμή πώλησης (κατάλληλες χρηματικές (χ.μ)). Επίσης δίνονται οι διαθέσιμες ποσότητες των πόρων που έχει εξασφαλίσει η εταιρεία.

	Προϊόν Α	Προϊόν Β	Προϊόν Γ	Διαθέσιμη Ποσότητα Πόρου
Αχλάδια (κιλά)	2	1	1.6	32
Ροδάκινα (κιλά)	1	2	1.6	40
Μίξη (ώρες)	1	2	2	43
Κονσερβοποίηση (ώρες)	1	1	1	60
Συσκευασία (ώρες)	2	1	1	40
Τιμή Πώλησης (χ.μ)	10	6	8	

Να διαμορφωθεί το π.γ.π που μεγιστοποιεί τα έσοδα της εταιρείας και χρησιμοποιώντας το LINDO να δοθούν απαντήσεις στα επόμενα ερωτήματα:

1. Ποιο είναι το βέλτιστο πλάνο παραγωγής και τα αντίστοιχα έσοδα που θα προκύψουν;
2. Πόση ποσότητα κάθε πόρου χρησιμοποιείται στο βέλτιστο πλάνο παραγωγής;
3. Αν η εταιρεία μπορούσε να βρει και άλλες ποσότητες αχλαδιών θα έπρεπε να προχωρήσει στην αγορά τους; Αν ναι ποιο είναι το μέγιστο ποσό χρημάτων που θα ήταν πρόθυμη να δαπανήσει ανά κιλό;
4. Σε τι ποσό (σε χ.μ) ανέρχεται η συμβολή καθενός από τους πόρους στα συνολικά έσοδα της επιχείρησης;
5. Αν η εταιρεία έπρεπε να κατοχυρώσει επιπλέον ποσότητα από κάποιους των πόρων ποιον θα έπρεπε να επιλέξει;
6. Υποθέστε ότι η εταιρεία μπορεί να προμηθευτεί ένα νέο μηχάνημα το οποίο θα της επιτρέψει να αυξήσει το χρόνο στο τμήμα μίξης από 43 σε 60 ώρες, θα υπάρξει μεταβολή στην άριστη λύση; Πως μπορεί να ελεγχθεί αν είναι καλύτερο να αυξηθεί ο χρόνος μίξης;
7. Μέχρι ποιου ποσού μπορούν να αυξηθούν ή να ελαττωθούν τα έσοδα από την πώληση μιας μονάδας του προϊόντος Α, χωρίς να επηρεαστεί το βέλτιστο πλάνο παραγωγής; Ποια είναι η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σε κάθε περίπτωση αντίστοιχα;
8. Πόσο θα μεταβληθούν τα συνολικά έσοδα εάν αυξηθούν τα έσοδα από την πώληση μιας μονάδας του προϊόντος Β κατά 2 χ.μ.;
9. Ποιο προϊόν δεν παράγεται στο βέλτιστο πλάνο παραγωγής; Πόσο πρέπει να είναι τα έσοδα από το προϊόν αυτό ώστε η εταιρεία να πάρει απόφαση να το παράγει;

Handwritten notes: \rightarrow Δεδομένου ο 3ος πόρος α-βρί 0,53

Handwritten notes: ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑ